

TEMA 1: LÍMITS I CONTINUÏTAT

1. Troba la relació que ha d'haver entre a i b per a que es compleixi la següent igualtat:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{2x+a}{2x-1} \right]^{x+5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ 1 - \frac{3}{2x+3} \right]^{bx+1}$$

2. Determina el valor de k perquè la funció  $f(x) = \frac{2x^2 - 3kx + 5}{x - 2}$  tengui per límit un nombre real quan x tendeix a 2. Calcula el valor d'aquest límit.

3. Donada la funció:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < -1 \\ \frac{x-1}{x(x+2)} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- a) Estudia la seva continuïtat.  
 b) Troba  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  i  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
4. Podem aplicar el teorema de Bolzano per assegurar que l'equació  $x^4 + \frac{1}{x-2} = 0$  té alguna solució a l'interval (0,3)?, i a l'interval (-2,0)? Raona les teves respostes.
5. Calcula els següents límits:

a)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - 2a^2x + a^3}{\sqrt{a} - \sqrt{x}}$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 6x + 1} - x)$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}}$

d)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{-3x^3 - 6x^2 - 3x}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 - x^2 + 1)^{\frac{x}{x+1}}$

f)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x^2 + 1}{3x - 1} \right)^{\frac{x}{2x-4}}$

6. Troba el valor de a i b perquè la següent funció definida a trossos sigui contínua en tots els nombres reals:

$$f(x) = \begin{cases} 2ax^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ x + a & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ -2x^2 - bx - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

7. Donades  $f(x) = e^{x-1} - 1$  i  $g(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 10$  :
- a) Troba un interval on g(x) tengui una arrel real  
 b) Demostra que f(x) i g(x) es tallen en algun punt.