

TEMA 3: SISTEMES D'EQUACIONS, MÀTRIS I DETERMINANTS

1. Resol el següent sistema matricial:
$$\begin{cases} A^{-1} \cdot X = C \cdot D \\ E \cdot X + Y \cdot B = D \end{cases}$$

on: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $D = (-1 \ 2)$ i $E = (0 \ -2)$

2. (a) Defineix matriu inversa i matriu triangular.

(b) Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$. Calcula el valor de a per tal que el producte $A \cdot A^t$ sigui una matriu diagonal (és a dir, que tinguem tots els elements que no estan a la diagonal principal que siguin zero)

3. Donada la matriu $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcula $(A^t \cdot A)^{1998}$.

4. Sigui $A \in M_{2 \times 2}$ i $B \in M_{2 \times 2}$, ambdues definides per:

$$(a_{ij}) = (b_{ij}) = \begin{cases} (-1)^i & \text{si } i = j \\ (-1)^{i+j} & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

- (a) Troba A i B .
(b) Calcula $|A|$

- (c) Calcula $D = -2 \cdot B \cdot C \cdot A^t$ on $C = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 4 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

5. Calcula la matriu inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

6. Tres famílies se'n van a una cafeteria. La primera família pren 2 cafès, 1 tallat i 2 descafeïnats; la segona família pren 3 cafès i 2 tallats; i la tercera família pren 1 cafè i 2 descafeïnats. A la primera família li cobren 5 €, a la segona 5.1 €, i a la tercera 2.9 €. Es denoten per x, y, z les incògnites que representen respectivament el preu d'un cafè, d'un tallat, i d'un descafeïnat.

- a) Donau la matriu A que expressa el nombre de cafès, de tallats i de descafeïnats que pren cada una de les tres famílies, de manera que $A \cdot X = B$, on

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad i \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 5.1 \\ 2.9 \end{pmatrix}$$

- b) Calculau A^{-1} .

- c) Resol el problema resolent l'equació matricial $A \cdot X = B$.

7. Resol el següent sistema d'equacions amb matrius:

$$\begin{cases} 5X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} \\ 3X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \end{cases}$$