

LLENGUATGE ALGEBRAIC

1. Utilitat de l'àlgebra

El llenguatge algebraic ens serveix per expressar amb precisió i claretat relacions i processos matemàtics difícils de transmetre amb altres codis com el llenguatge parlat.

L'àlgebra és una branca de les matemàtiques que utilitza lletres per a representar nombres, perquè aquests nombres són desconeguts o per a poder-los generalitzar, etc.

Algunes utilitats de l'àlgebra són:

- Per expressar propietats de les operacions aritmètiques (identitats)

Propietat distributiva: el producte d'un nombre per una suma és igual a la suma dels productes parcials del nombre per cada sumand.

$$a(b + c) = ab + ac$$

- Per generalitzar l'evolució de sèries numèriques (terme general)

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

- Per expressar la relació entre variables relatives a diferents magnituds (fórmules)

$$F = ma \rightarrow \begin{cases} F \rightarrow \text{força} \\ m \rightarrow \text{massa} \\ a \rightarrow \text{acceleració} \end{cases} \quad x = vt \rightarrow \begin{cases} x \rightarrow \text{espai} \\ v \rightarrow \text{velocitat} \\ t \rightarrow \text{temps} \end{cases} \quad R = \frac{V}{I} \rightarrow \begin{cases} R \rightarrow \text{resistència} \\ V \rightarrow \text{voltatge} \\ I \rightarrow \text{intensitat} \end{cases}$$

- Per manejar nombres de valor indeterminat i les seves operacions (expressions algebraiques)

Un nombre natural $\rightarrow a$

El següent a aquest nombre natural $\rightarrow a + 1$

El doble del següent $\rightarrow 2(a + 1)$

Un altre nombre 8 unitats menors $\rightarrow a - 8$

El quadrat del nombre més el triple del nombre $\rightarrow a^2 + 3a$

- Per expressar relacions que facilitin la resolució de problemes (equacions)

Na Laura gasta la meitat de la paga en el cine i la tercera part en un entrapà. Així, només li queden 2 €. Quant tenia de paga?



cost cinema + cost entrepà + el que queda = total paga(x)

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 2 = x$$

- Taules de nombres

1	2	3	4	5	6	7	8	9	x
1	2 ² =4	3 ² =9	4 ² =16	5 ² =25	6 ² =36	7 ² =49	8 ² =64	9 ² =81	x ²

Activitat resolta

Si diem que x representa un nombre natural qualsevol. Escriu: a) els dos nombres naturals que el segueixen, b) la suma d'aquests tres nombres.

a) $x+1$ $x+2$

b) $x+x+1+x+2$

2. Monomis

Un monomi és una expressió algebraica formada pel producte d'un nombre per una o varies lletres:

$$4x^2 \quad \frac{2}{3}ab^2 \quad \frac{-1}{2}xy^2zt \quad zx \quad 3 \quad -t^3$$

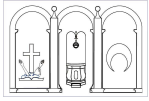
Grau d'un monomi: és el nombre de factors que formen la seva part literal.

Monomis semblants: són aquells monomis que tenen la mateixa part literal.

Exemples: $2xz$ $3xz$ són monomis semblants

$3x$ $\frac{-1}{2}x$ són monomis semblants

Monomi	Part numèrica	Part literal	Grau
$4x^2$	4	x^2	2
$\frac{2}{3}ab^2$	$\frac{2}{3}$	ab^2	3
$\frac{-1}{2}xy^2zt$	$\frac{-1}{2}$	xy^2zt	5
zx	1	zx	2
3	3	x^0	0
$-t^3$	-1	t^3	3



2.1 Valor numèric d'un monomi

El valor numèric d'un monomi o de qualsevol expressió algebraica s'obté, quan substituïm les lletres per un valor determinat, és a dir, per el corresponent valor numèric.

Exemples:

$$8x^2 \rightarrow x = 2$$

$$8x^2 \rightarrow x = -3$$

$$8 \cdot (2)^2 = 8 \cdot 4 = 32$$

$$8 \cdot (-3)^2 = 8 \cdot 27 = 216$$

2.2 Operacions amb monomis: Suma

Només podem sumar monomis que són semblants. En aquest cas sumarem les parts numèriques i deixarem indicada la part literal.

Exemples:

$$1) 5a^2b + 6ba^2 = (5 + 6)a^2b = 11a^2b$$

$$2) 7a - 5a = (7 - 5)a = 2a$$

$$3) 3x + 5x - 4x = 4x$$

$$4) 6x^2 - 3x^2 = 3x^2$$

$$5) \frac{x}{3} - \frac{1}{2}x = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)x = \frac{2-3}{6}x = -\frac{1}{6}x$$

Si els monomis no són semblants deixarem la suma indicada.

Exemples:

$$1) 2x^2 - 5x \rightarrow \text{no són semblants}$$

$$2) ba^2 + b \rightarrow \text{no són semblants}$$



Activitats resoltes:

1) Redueix les següents expressions

Recorda que per llevar parèntesis, quan hi ha un signe menys davant del parèntesis, tots els monomis de dins canvien de signe.

$$1) 5x - 2 + 3x + 7 = 5x + 3x - 2 + 7 = 8x + 5$$

$$2) 3a - (1 + 2a) = 3a - 1 - 2a = 3a - 2a - 1 = a - 1$$

$$3) 6x^2 - 3x^2 + 4x - 5x = 3x^2 - x$$

$$4) (a + 1) - (a - 1) = a + 1 - a + 1 = a - a + 1 + 1 = 2$$

$$5) (5x + 1) - (2x - 3) = 5x + 1 - 2x + 3 = 3x + 4$$

$$6) (4x^2 - 6) - (x^2 - 2x + 1) = 4x^2 - 6 - x^2 + 2x - 1 = 3x^2 - 7 + 2x$$

2.3 Operacions amb monomis: Producte

Per multiplicar dos o més monomis:

1) Multiplicarem les parts numèriques (inclosos els signes)

2) Multiplicarem les parts literals, si tenen la mateixa lletra, mitjançant la propietat de producte de potències de la mateixa base $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.

Exemples:

$$1) 5x \cdot 7x = 5 \cdot 7 \cdot x \cdot x = 35x^{1+1} = 35x^2$$

$$2) 2x \cdot (-5x^2) = -10x^3$$

$$3) 3a^2 \cdot 4ab = 12a^3b$$

$$4) \left(\frac{1}{2}x^2y\right)\left(\frac{-3}{2}xy^2\right) = \frac{-3}{4}x^3y^3$$

$$5) 3a \cdot \left(\frac{5}{6}ax\right) = \frac{15}{6}a^2x = \frac{5}{2}a^2x$$

Propietat distributiva

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$x^2(x - 1) = x^2 \cdot x - 1 \cdot x^2 = x^3 - x^2$$

$$2x(x - 3) = 2x \cdot x - 2x \cdot 3 = 2x^2 - 6x$$

$$y(x + y) = xy + y \cdot y = xy + y^2$$



2.4 Operacions amb monomis: Quocient

Per dividir dos monomis:

- 1) Dividirem les parts numèriques (inclosos els signes), sempre que doni divisió exacte. Si no és així, ho deixarem indicat en forma de fracció, que si escau, simplifiquem.
- 2) Dividirem les parts literals. Aplicant la propietat de quocient de potències de la mateixa base

$$\text{base } \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Exemples:

$$1) \frac{6x^2}{3x} = 2x^{2-1} = 2x$$

$$2) 2x^3 : 5x = \frac{2}{5}x^{3-1} = \frac{2}{5}x^2$$

$$3) 6a^3b^2 : 2ab^2 = 3a^2b^0 = 3a^2 \rightarrow a^0 = 1$$

$$4) 8x^2y : 6y^3 = \frac{8}{6}x^2y^{2-3} = \frac{4}{3}x^2y^{-1} = \frac{4}{3}x^2 \frac{1}{y} \rightarrow a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Activitats resoltes:

2) Redueix

$$a) 3x \cdot 2x = 6x^2 \quad h) \frac{-6}{7}y^2 \cdot \frac{7}{8}y^4 = -\frac{6}{8}y^6 = -\frac{3}{4}y^6$$

$$b) 5x \cdot x^3 = 5x^4 \quad i) 8a : 4a = 2$$

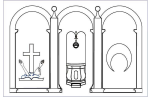
$$c) -2x \cdot 4x^2 = -8x^3 \quad j) 8ab : 2ab = 4$$

$$d) 2ab \cdot 3a = 6a^2b \quad k) \frac{6x^2}{3x} = 2x$$

$$e) 3ab \cdot (-5ab) = -15a^2b^2 \quad l) \frac{5x}{15x^3} = \frac{1}{3}x^{-2} = \frac{1}{3x^2}$$

$$f) a^2b \cdot b^2a^2 = a^4b^4 \quad m) 3a^2b^3 : 6ab = \frac{1}{2}ab^2$$

$$g) \frac{1}{2}x \cdot \frac{3}{4}x^2 = \frac{3}{8}x^3 \quad n) \frac{4ab^2}{4a^2b} = a^{-1}b = \frac{b}{a}$$



3) Opera i redueix

$$a) [(-5x)(-2x)]3x = 10x^2 \cdot 3x = 30x^3$$

$$b) (x^2 : x)x = x \cdot x = x^2$$

$$c) \frac{x^2}{x \cdot x} = \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$d) (4x \cdot 3x) : (6x^2) = 12x^2 : 6x^2 = 6x^0 = 6$$

4) Si diem n a un nombre qualsevol, tradueix a llenguatge algebraic els següents enunciats:

a) La meitat d'n $\rightarrow \frac{n}{2}$

b) La meitat d'n menys quatre unitats $\rightarrow \frac{n}{2} - 4$

c) La meitat d'n més quatre unitats $\rightarrow \frac{n}{2} + 4$

d) La meitat del resultat de restar quatre unitats a n $\rightarrow \frac{n-4}{2}$

e) El doble del resultat de sumar-li cinc a n $\rightarrow 2(n+5)$

5) Utilitza el llenguatge algebraic per expressar:

a) Un múltiple de cinc: $5x$

b) Un múltiple de dos: $2x$

c) Qualsevol nombre que no sigui múltiple de 2: $2x-1$

6) Completa, amb una expressió algebraica, la casella que va emparellada a n:

1	2	3	4	10	n
4	7	10	13	31	$3n+1$

7) Escribe una equació per a cada enunciat i intenta trobar el nombre que escau en cada cas perquè es compleixi:

a) Si a un nombre x, li restem 20 i doblem el resultat, obtenim 10.

$$2(x-20)=10 \quad x=25$$

b) El triple d'un nombre x, coincideix amb el valor obtingut de sumar-li 10.

$$3x=x+10 \quad x=5$$

c) La meitat d'un nombre x, coincideix amb el resultat de restar-li 11.

$$\frac{x}{2} = x - 11 \quad x = 22$$

8) Indica el grau de cadascun dels monomis:

a) $5x^2 \rightarrow$ grau 2 b) $\frac{3}{4}x \rightarrow$ grau 1 c) $-7xy \rightarrow$ grau 2 d) $\frac{3}{4}a^5 \rightarrow$ grau 5

e) $a^2b^4 \rightarrow$ grau 6 f) $\frac{-1}{2}a^3b^3 \rightarrow$ grau 6 g) $\frac{-16}{7}a^2bc^3 \rightarrow$ grau 6 h) $8x^2yzt^3 \rightarrow$ grau 7



9) Redueix:

$$a) 3x + 2x + x = 6x$$

$$b) 5x^2 + 2x^2 = 7x^2$$

$$c) 3x - 5 + 2x + 4 = 5x - 1$$

$$d) x^2 + x + x^2 + x = 2x^2 + 2x$$

$$e) 3x^2 - x^2 + 5 - 7 = 2x^2 - 2$$

$$f) 3x + x^2 - 2x - x^2 + 3 = 3x - 2x + x^2 - x^2 + 3 = x + 3$$

$$g) x^3 + 2x^2 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x^3 + 4 = x^3 - \frac{3}{2}x^3 + 2x^2 - \frac{1}{2}x^2 + 4 = \left(1 - \frac{3}{2}\right)x^3 + \left(2 - \frac{1}{2}\right)x^2 + 4 = \\ = \frac{-1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 4$$

$$h) ab^2 - \frac{1}{2}ab^2 - b^2 + \frac{3}{2}ab^2 = ab^2 + \frac{3}{2}ab^2 - \frac{1}{2}ab^2 - b^2 = \left(1 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)ab^2 - b^2 = 2ab^2 - b^2$$

$$i) abc + abc - abc = (1 + 1 - 1)abc = abc$$

$$j) 2x \cdot 7x = 14x^2$$

$$k) 12x \cdot \frac{1}{4}x^2 = 3x^3$$

$$l) (-5x) \left(\frac{-3}{5}x^2\right) = \frac{(-5)(-3)}{5}x^3 = 3x^3$$

$$m) x^8 : x^6 = x^2$$

$$n) \frac{-6x^5}{2x} = -3x^4$$

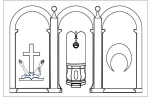
$$o) \frac{\frac{2}{3}x^4}{\frac{1}{3}x^2} = \left(\frac{2}{3} : \frac{1}{3}\right)x^2 = 3x^2$$

$$p) (3x^2 + x^2)(6x^3 - 4x^3) = 4x^2 \cdot 2x^3 = 8x^5$$

$$q) \left(\frac{1}{2}x^2 + x^2\right)(7x^3 - x^3) = \frac{3}{2}x^2 \cdot 6x^3 = 9x^5$$

$$r) \left(\frac{3}{2}x - x\right) : (4x - x) = \frac{1}{2}x : 3x = \frac{1}{6}$$

$$s) \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x^2 - x^2\right) : (4x^2 - x^2) = -2x^2 : 3x^2 = -\frac{2}{3}$$



10) Lleva parèntesis i redueix

$$a) x - (x - 2) = x - x + 2 = 2$$

$$b) 3x + (2x + 3) = 3x + 2x + 3 = 5x + 3$$

$$c) (5x - 1) - (2x + 1) = 5x - 1 - 2x - 1 = 3x - 2$$

$$d) (7x - 4) + (1 - 6x) = 7x - 4 + 1 - 6x = x - 3$$

$$e) (1 - 3x) - (1 - 5x) = 1 - 3x - 1 + 5x = 2x$$

$$f) 2x - (x - 3) - (2x - 1) = 2x - x + 3 - 2x + 1 = -x + 4$$

$$g) 4x - (2x - 1) + 5x - (4x - 2) = 4x - 2x + 1 + 5x - 4x + 2 = 3x + 3$$

$$h) (x - 2) + (2x + 3) - (5x - 7) = x - 2 + 2x + 3 - 5x + 7 = -2x + 8$$

11) Opera i redueix

$$a) 5x \cdot 2 = 10x \quad b) 6x : 2 = 3x$$

$$c) 3x \cdot 4x = 12x^2 \quad d) 12x : 3x = 4$$

$$e) \frac{3}{5}x^2 + 2x^2 = \frac{13}{5}x^2$$

$$f) 5a + \frac{1}{2}a = \frac{11}{2}a$$

$$g) -3a^2 - 7a^2 = -10a^2$$

$$h) \frac{3}{2}x + \frac{x}{2} = 2x$$

$$i) 5x^2 + \frac{1}{3}x^2 + x = \frac{16}{3}x^2 + x$$

$$j) (-5a) \cdot 3a^4 = -15a^5$$

$$k) -2a \cdot \left(-\frac{1}{2}a\right) = -a^2$$

$$l) \frac{3}{2}x \cdot \frac{1}{2}x = \frac{3}{4}x^2$$

$$m) \frac{-3}{4}x^4 \cdot \frac{-1}{3}x = \frac{1}{4}x^5$$

$$n) 5x^2(-6x - 3x) = 5x^2 \cdot (-9x) = -45x^3$$

$$o) \frac{3}{2}x^3 : \frac{1}{3}x^4 = \frac{9}{2}x^{-1} = \frac{9}{2x}$$

$$p) x(x - 2) = x \cdot x - 2x = x^2 - 2x \rightarrow \text{propietat distributiva}$$



3. Polinomis

Són expressions algebraiques formades per sumes (o restes) de monomis. La suma o resta de dos monomis s'anomena *binomi*. La suma o resta de tres monomis s'anomena *trinomi*. La suma o resta de varis monomis s'anomena *polinomi*.

Exemples:

$$a + b \rightarrow \text{binomi}$$

$$x^2 - 2 \rightarrow \text{binomi}$$

$$2a + 5b + a^2b \rightarrow \text{trinomi}$$

$$2x^4 - 5x^2 + 6x - 8 \rightarrow \text{polinomi}$$

3.1. Grau d'un polinomi

El grau d'un polinomi és el major dels graus dels monomis que el formen.

$$7x^3 - 4x + 3 \rightarrow \text{grau } 3 \quad \text{monomi } 7x^3$$

$$4xy^3 + 5x - 3x^3y^2 + x^4 \rightarrow \text{grau } 5 \quad \text{monomi } -3x^3y^2$$

Un polinomi s'anomena *complet* quan té un monomi de cada grau fins el 0.

$$-2x^3 - 3x - 7$$

$$-7 \rightarrow \text{monomi de grau } 0 \text{ o terme independent}$$

3.2. Valor numèric d'un polinomi

Calcular el valor numèric d'un polinomi és substituir cadascuna de les lletres que el componen pel valor corresponent. És a dir, posar el valor de la lletra a cada lloc on correspongui.

Exemple:

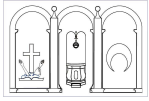
$$2x^2 - 3x - 7 \rightarrow \text{per } x = 4$$

$$2 \cdot (4)^2 - 3 \cdot 4 - 7 = 2 \cdot 16 - 12 - 7 = 32 - 12 - 7 = 20 - 7 = 13$$

Activitats resoltes

12) Indica el grau de cada polinomi

$$a) x^4 - 1 \rightarrow \text{grau } 4 \quad b) 3x + 3 \rightarrow \text{grau } 1 \quad c) 1 + x^2 + x \rightarrow \text{grau } 2$$



13) Calcula el valor numèric del polinomi $x^3 - 6x^2 + 8$

a) per $x = 0$

$$0^3 - 6 \cdot 0^2 + 8 = 8$$

b) per $x = -1$

$$(-1)^3 - 6(-1)^2 + 8 = 1 - 6 \cdot 1 + 8 = 9 - 6 = 3$$

c) per $x = 2$

$$2^3 - 6 \cdot 2^2 + 8 = 8 - 6 \cdot 4 + 8 = 8 - 24 + 8 = 16 - 24 = -8$$

14) Calcula el valor numèric del polinomi $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

a) per $x = 0$

$$0^4 - 0^3 + 0^2 - 0 + 1 = 1$$

b) per $x = 1$

$$1^4 - 1^3 + 1^2 - 1 + 1 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 1$$

c) per $x = 2$

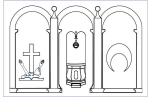
$$2^4 - 2^3 + 2^2 - 2 + 1 = 16 - 8 + 4 - 2 + 1 = 21 - 10 = 11$$

d) per $x = 3$

$$3^4 - 3^3 + 3^2 - 3 + 1 = 81 - 27 + 9 - 3 + 1 = 91 - 30 = 61$$

e) per $x = \frac{1}{2}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{1}{16} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1 - 2 + 4 - 8 + 16}{16} = \frac{5}{16}$$



3.3. Operacions amb polinomis

3.3.1. Suma de polinomis

El resultat de la suma de polinomis és un altre polinomi.
Sumem entre si els monomis semblants de cada polinomi

$$A(x) = x^3 + 7x - 3$$

$$B(x) = -4x^2 + 2x - 5$$

$$A + B = (x^3 + 7x - 3) + (-4x^2 + 2x - 5) = x^3 - 4x^2 + 7x + 2x - 3 - 5 = x^3 - 4x^2 + 9x - 8$$

$$C(x) = 5x^2 + 4x - 2$$

$$D(x) = 3x^2 - x^3 + 6x - 1$$

$$\begin{aligned} C + D &= (5x^2 + 4x - 2) + (3x^2 - x^3 + 6x - 1) = -x^3 + 5x^2 + 3x^2 + 4x + 6x - 2 - 1 = \\ &= -x^3 + 8x^2 + 10x - 3 \end{aligned}$$

3.3.2. Resta de polinomis

El resultat de restar dos polinomis és un altre polinomi.
Es canvia el signe de tots els monomis del polinomi negatiu

$$A(x) = 5x^2 + 7x - 3$$

$$B(x) = -4x^2 - 2x + 5$$

$$\begin{aligned} A - B &= (5x^2 + 7x - 3) - (-4x^2 - 2x + 5) = 5x^2 + 7x - 3 + 4x^2 + 2x - 5 = 5x^2 + 4x^2 + 7x + 2x - 3 - 5 = \\ &= 9x^2 + 9x - 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B - A &= (-4x^2 - 2x + 5) - (5x^2 + 7x - 3) = -4x^2 - 2x + 5 - 5x^2 - 7x + 3 = \\ &= -9x^2 - 9x + 8 \end{aligned}$$

Activitats resoltes:

15) Donats els polinomis $A(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4$, $B(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 2$

$$\begin{aligned} a) A + B &= B + A = (2x^3 - 3x^2 + 4) + (x^3 - 4x^2 + 3x + 2) = 2x^3 + x^3 - 3x^2 - 4x^2 + 3x + 4 + 2 = \\ &= x^3 - 7x^2 + 3x + 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) A - B &= (2x^3 - 3x^2 + 4) - (x^3 - 4x^2 + 3x + 2) = 2x^3 - 3x^2 + 4 - x^3 + 4x^2 - 3x - 2 = \\ &= 2x^3 - x^3 - 3x^2 + 4x^2 - 3x + 4 - 2 = x^3 + x^2 - 3x + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) B - A &= (x^3 - 4x^2 + 3x + 2) - (2x^3 - 3x^2 + 4) = x^3 - 4x^2 + 3x + 2 - 2x^3 + 3x^2 - 4 = \\ &= x^3 - 2x^3 - 4x^2 + 3x^2 + 3x + 2 - 4 = -x^3 - x^2 + 3x - 2 \end{aligned}$$



16) Donats els polinomis $M(x) = 3x^3 - 5x^2 - 6x + 9$ $N(x) = 4x^2 - 7x - 5$, calcula:

a) $M + N$ b) $M - N$ c) $N - M$

$$\begin{aligned} a) M + N &= (3x^3 - 5x^2 - 6x + 9) + (4x^2 - 7x - 5) = 3x^3 - 5x^2 + 4x^2 - 6x - 7x + 9 - 5 = \\ &= 3x^3 - x^2 - 13x + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) M - N &= (3x^3 - 5x^2 - 6x + 9) - (4x^2 - 7x - 5) = 3x^3 - 5x^2 - 6x + 9 - 4x^2 + 7x + 5 = \\ &= 3x^3 - 9x^2 + x + 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) N - M &= (4x^2 - 7x - 5) - (3x^3 - 5x^2 - 6x + 9) = 4x^2 - 7x - 5 - 3x^3 + 5x^2 + 6x - 9 = \\ &= -3x^3 + 9x^2 - x - 14 \end{aligned}$$

17) Sabent $A(x) = 3x^2 + \frac{1}{2}x - 2$ $B(x) = \frac{5}{2}x^3 + 2x^2 - \frac{3}{2}$, calcula:

$$C(x) = x^3 - \frac{2}{3}x^2 - 2x + 1$$

a) $A + B$ b) $A + C$ c) $B + C$ d) $A - B$ e) $A - C$ f) $B + C - A$

$$a) A + B = \left(3x^2 + \frac{1}{2}x - 2\right) + \left(\frac{5}{2}x^3 + 2x^2 - \frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2}x^3 + 5x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$$

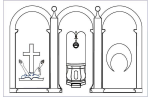
$$b) A + C = \left(3x^2 + \frac{1}{2}x - 2\right) + \left(x^3 - \frac{2}{3}x^2 - 2x + 1\right) = x^3 + \frac{7}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 1$$

$$c) B + C = \left(\frac{5}{2}x^3 + 2x^2 - \frac{3}{2}\right) + \left(x^3 - \frac{2}{3}x^2 - 2x + 1\right) = \frac{11}{6}x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 2x - \frac{1}{2}$$

$$d) A - B = \left(3x^2 + \frac{1}{2}x - 2\right) - \left(\frac{5}{2}x^3 + 2x^2 - \frac{3}{2}\right) = -\frac{5}{2}x^3 + x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$e) A - C = \left(3x^2 + \frac{1}{2}x - 2\right) - \left(x^3 - \frac{2}{3}x^2 - 2x + 1\right) = -x^3 + \frac{11}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 3$$

$$f) B + C - A = \frac{11}{6}x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 2x - \frac{1}{2} - \left(3x^2 + \frac{1}{2}x - 2\right) = \frac{11}{6}x^3 - \frac{5}{3}x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}$$



3.3.3. Producte de polinomis

El resultat d'un producte de polinomis és un altre polinomi.

Producte d'un polinomi per un nombre

$$3(x^3 - 5x^2 - 2x + 1) = 3x^3 + 3 \cdot (-5x^2) + 3 \cdot (-2x) + 3 \cdot 1 = 3x^3 - 15x^2 - 6x + 3$$

Producte d'un polinomi per un monomi

$$\begin{aligned}(-4x)(x^3 - 5x^2 - 2x + 1) &= (-4x)x^3 + (-4x)(-5x^2) + (-4x)(-2x) + (-4x) \cdot 1 = \\ &= -4x^4 + 20x^3 + 8x^2 - 4x\end{aligned}$$

Producte de dos polinomis

$$\begin{aligned}(x^3 - 5x^2 - 2x + 1)(x^2 - 4x + 3) &= x^3 \cdot x^2 - 5x^2 \cdot x^2 - 2x \cdot x^2 + 1 \cdot x^2 + \\ &+ x^3 \cdot (-4x) - 5x^2 \cdot (-4x) - 2x \cdot (-4x) + 1 \cdot (-4x) + \\ &+ x^3 \cdot 3 - 5x^2 \cdot 3 - 2x \cdot 3 + 1 \cdot 3 = x^5 - 5x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x^4 + 20x^3 + 8x^2 - 4x + 3x^3 - 15x^2 - 6x + 3 = \\ &= x^5 - 5x^4 - 4x^4 - 2x^3 + 20x^3 + 3x^3 + x^2 + 8x^2 - 15x^2 - 4x - 6x + 3 = x^5 - 9x^4 + 21x^3 - 6x^2 - 10x + 3\end{aligned}$$

Aleshores, per a calcular el producte de dos polinomis es multiplica cada monomi d'un dels polinomis factors per tots i cadascun dels monomis de l'altre polinomi factor, i es sumen els monomis semblants.

Activitats resoltes:

18) Calcula els següents productes:

a) $3(x + 4) = 3x + 12$

b) $5x(x - 1) = 5x^2 - 5x$

c) $3x^2(x + 2) = 3x^3 + 6x^2$

d) $5(3x^2 - 5x - 7) = 15x^2 - 25x - 35$

e) $2x^2(x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x + 1) = 2x^6 - 4x^5 - 10x^4 + 12x^3 + 2x^2$

f) $(x + 1)(2x - 3) = 2x \cdot x + x \cdot (-3) + 1 \cdot 2x + 1 \cdot (-3) = 2x^2 - 3x + 2x - 3 = 2x^2 - x - 3$

g) $(3x - 1)(2x + 2) = 3x \cdot 2x + 3x \cdot 2 - 1 \cdot 2x - 1 \cdot 2 = 6x^2 + 6x - 2x - 2 = 6x^2 + 4x - 2$

h) $3(x + 2)(x - 1) = (3x + 3 \cdot 2)(x - 1) = (3x + 6)(x - 1) = 3x \cdot x + 3x \cdot (-1) + 6x + 6 = 3x^2 - 3x + 6x + 6 = 3x^2 + 3x + 6$

i) $(x + 3)(x^2 - x + 1) = x \cdot x^2 + x \cdot (-x) + x \cdot 1 + 3x^2 + 3 \cdot (-x) + 3 = x^3 - x^2 + x + 3x^2 - 3x + 3 = x^3 - x^2 + 3x^2 + x - 3x + 3 = x^3 + 2x^2 - 2x + 3$



$$\begin{aligned}j)(x^2 + 5x + 3)(x^4 - 2x^2 + 6x - 1) &= x^2 \cdot x^4 + 5x \cdot x^4 + 3 \cdot x^4 + \\ &+ x^2 \cdot (-2x^2) + 5x \cdot (-2x^2) + 3 \cdot (-2x^2) + \\ &+ x^2 \cdot 6x + 5x \cdot 6x + 3 \cdot 6x + \\ &+ x^2 \cdot (-1) + 5x \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) = \\ &= x^6 + 5x^5 + 3x^4 - 2x^4 - 10x^3 - 6x^2 + 6x^3 + 30x^2 + 18x - x^2 - 5x - 3 = \\ &= x^6 + 5x^5 + x^4 - 4x^3 + 23x^2 + 13x - 3\end{aligned}$$

3.3.4. Productes notables

Suma al quadrat

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$$

Exemples:

$$(x+3)^2 = (x)^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$(4+5x)^2 = 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 5x + (5x)^2 = 16 + 40x + 25x^2$$

Diferència al quadrat

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$$

Exemples:

$$(x-5)^2 = (x)^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 - 10x + 25$$

$$(1-3x)^2 = 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 3x + (3x)^2 = 1 - 6x + 9x^2$$

Suma per diferència

$$(a+b)(a-b) = (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

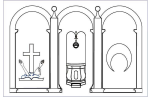
Exemples:

$$(x+2)(x-2) = x^2 - 2^2 = x^2 - 4$$

$$(x-3)(x+3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$$

$$(2x+5)(2x-5) = (2x)^2 - 5^2 = 4x^2 - 25$$

$$\left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{5}\right) = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{x^2}{4} - \frac{9}{25}$$



Aplicacions dels productes notables:

1) Descompondre en factors l'expressió $x^2 - 6x + 9$

$$x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = (x-3)(x-3)$$

2) Descompondre en factors l'expressió $x^2 - 9$

$$x^2 - 9 = (x)^2 - 3^2 = (x-3)(x+3)$$

3) Simplificar:

$$\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9} = \frac{(x-3)(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \frac{x-3}{x+3}$$

3.3.5. Extracció de factor comú

Recorda:

$a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d \rightarrow$ és una suma, els sumands de la qual són productes. Tots aquest productes tenen un mateix factor igual, a ; el qual anomenarem *factor comú*.

Podem transformar la suma *extraient factor comú*, col·locant el factor comú multiplicant amb un parèntesi la suma dels factors no comuns:

$$a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d = a \cdot (b + c + d)$$

Podem concloure que, si en una suma tots els sumands tenen factors repetits es poden treure fora en del parèntesi.

Exemples:

$$3x^4 - 6x^3 + 9x^2 = 3 \cdot x^2 \cdot x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x^2 + 3 \cdot 3 \cdot x^2 = 3x^2(x^2 - 2x + 3)$$

$$20x^2 - 15x^3 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot x^2 - 3 \cdot 5 \cdot x \cdot x^2 = 5x^2(4 - 3x)$$

Activitats resoltes:

19) Extreu factor comú:

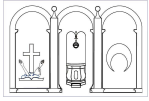
$$a) x^2 + x^3 = x^2(1 + x)$$

$$b) abc^2 + c^2 ab^2 = abc^2(1 + b)$$

$$c) 2x^2 + x = x(2x + 1)$$

$$d) x^2 y - x^3 y^2 = x^2 y(1 - xy)$$

$$e) 2x^2 - 2x + 2 = 2(x^2 - x + 1)$$



20) Lleva parèntesis fent servir els productes notables:

$$a)(a+1)(a-1) = a^2 - 1$$

$$b)(5-x)(5+x) = 25 - x^2$$

$$c)(2x+1)(2x-1) = (2x)^2 - 1^2 = 4x^2 - 1$$

$$d)(2a+3b)(2a-3b) = (2a)^2 - (3b)^2 = 4a^2 - 9b^2$$

21) Expressa en quadrat d'una suma o de la diferència:

$$a)x^2 - 4x + 4 = (x)^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 = (x-2)^2$$

$$b)x^2 + 8x + 16 = (x)^2 - 2 \cdot 4 \cdot x + 4^2 = (x+4)^2$$

$$c)x^2 + 12x + 36 = (x)^2 - 2 \cdot 6 \cdot x + 6^2 = (x+6)^2$$

$$d)4x^2 - 12x + 9 = (2x)^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2x + 3^2 = (2x-3)^2$$

3.3.6. Divisió de polinomis

Per dividir polinomis seguim les mateixes passes que per a dividir nombres naturals. L'única diferència és que fem feina amb graus.

La divisió de dos polinomis és un altre polinomi que ha de complir la següent igualtat:

$$D = d \cdot q + r$$

D polinomi dividend

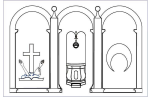
d polinomi divisor

q polinomi quocient

r polinomi residu

Divisió de nombres naturals, exemple:

$\begin{array}{r} 28 \quad \left \begin{array}{l} 7 \\ \hline 4 \end{array} \right. \\ -28 \\ \hline 0 \end{array}$	$28 : 7 = 4$	$29 \quad \left \begin{array}{l} 7 \\ \hline 4 \end{array} \right. \\ -28 \\ \hline 1 \end{array}$	$28 : 7 = 4$
--	--------------	---	--------------



Exemples:

$$(7x^4 - 11x^3 - 94x + 7) : (x - 3)$$

$$7x^4 - 11x^3 - 94x + 7 \left| \begin{array}{l} x - 3 \\ \hline 7x^3 + 10x^2 + 30x - 4 \end{array} \right. \quad q(x) = 7x^3 + 10x^2 + 30x - 4 \quad r(x) = -5$$
$$- 7x^4 + 21x^3$$

$$10x^3 - 94x + 7$$
$$- 10x^3 + 30x^2$$

$$30x^2 - 94x + 7$$
$$- 30x^2 + 90x$$

$$- 4x + 7$$
$$4x - 12$$

$$- 5$$

$$(2x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 3x - 7) : (x^2 - 2x + 1)$$

$$2x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 3x - 7 \left| \begin{array}{l} x^2 - 2x + 1 \\ \hline 2x^2 - x \end{array} \right. \quad q(x) = 2x^2 - x \quad r(x) = 4x - 7$$

$$- 2x^4 + 4x^3 - 2x^2$$

$$- x^3 + 2x^2 + 3x - 7$$
$$x^3 - 2x^2 + x$$

$$4x - 7$$



Divisió pel mètode de Ruffini

El mètode de Ruffini és una manera més senzilla d'efectuar la divisió de polinomis, però només, es pot aplicar quan el polinomi divisor és de la forma $x \pm a$

Exemple:

$$(x^4 + 3x^2 - x + 1) : (x - 1)$$

