

EQUACIONS

1. Significat i utilitat

1.1. Què és una equació?

Una equació és una *igualtat* entre dues expressions algebraïques, que només es compleix quan la lletra o *incògnita* pren un o uns determinats valors que s'anomenen *solucions de l'equació*.

Exemples:

$$3x + 2 = 6x - 1$$

$$3x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$\sqrt{x-3} = 3x-1$$

1.2. Per a què serveix una equació?

Les equacions permeten codificar relacions en llenguatge algebraic. Són una potentíssima eina per a resoldre problemes.

Per exemple:

A) La meitat d'un nombre és igual a la seva cinquena part més sis unitats.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Un nombre} \rightarrow x \\ \text{La meitat de ln ombre} \rightarrow \frac{x}{2} \\ \text{La cinquena part} \rightarrow \frac{x}{5} \end{array} \right\} \rightarrow \text{equació} \rightarrow \frac{x}{2} = \frac{x}{5} + 6$$

B) L'edat de na Laura coincideix amb la cinquena part de la que tindrà d'aquí a 28 anys.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Edat actual Laura} \rightarrow x \\ \text{Edat passats 28 anys} \rightarrow x + 28 \end{array} \right\} \rightarrow \text{equació} \rightarrow x = \frac{x + 28}{5}$$

C) Una habitació rectangular és tres metres més llarga que ampla, i la seva superfície és de 28 m².

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ample} \rightarrow x \\ \text{Llarg} \rightarrow x + 3 \end{array} \right\} \rightarrow x(x + 3) = 28$$



1.3. Què és resoldre una equació?

Resoldre una equació és trobar els valors, o valors, que han de prendre les lletres perquè la igualtat sigui vàlida.

Exemple:

$$3x + 2 = 6x - 1$$

per $x = 0$??

$$3 \cdot 0 + 2 = 6 \cdot 0 - 1$$

$$2 \neq -1 \Rightarrow x = 0 \text{ NO ÉS SOLUCIÓ}$$

$$3x + 2 = 6x - 1$$

per $x = 1$??

$$3 \cdot 1 + 2 = 6 \cdot 1 - 1$$

$$3 + 2 = 6 - 1$$

$$5 = 5 \Rightarrow x = 1 \text{ ÉS SOLUCIÓ}$$

1.4. Resoldre una equació per tempteig.

Abans d'aprendre cap tècnica específica, ten en compte que raonant amb el que ja saps, o temptejant, pots resoldre moltes equacions.

El *tempteig* consisteix en provar possibles valors de les lletres, comprovant si aquests compleixen la igualtat, és clar, que s'han de provar valors amb un poc de sentit, i aprofitar el que un sap de matemàtiques.

Exemples:

A) $3x = 24 \rightarrow$ *quin nombre multiplicat per 3 dóna 24?*

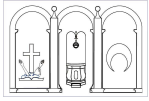
$$x = 8$$

B) $5x - 20 = 0 \rightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{pensa a quin nombre cal restar -li 20 perquè sigui igual a 0} \\ \text{després quant ha de valer } x \end{array} \right.$

$$5 \cdot 4 = 20 \quad 5 \cdot 4 - 20 = 0 \Rightarrow x = 4$$

C) $\frac{4x+3}{5} = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{4 \cdot \frac{1}{2} + 3}{5} = \frac{2+3}{5} = \frac{5}{5} = 1$

D) $\sqrt{2x+1} = 5 \rightarrow 2x+1 = 25 \rightarrow 2 \cdot 12 + 1 = 24 + 1 = 25 \Rightarrow x = 12$



Activitats resoltes:

1. Associa cada enunciat amb l'equació que l'expressa algebraicament:

a) La tercera part d'un nombre és igual a la quarta part més una unitat.

$$\frac{x}{3} = \frac{x}{4} + 1$$

b) L'edat de n'andreu és el triple que la de la seva germana, i entre els dos sumen 8 anys.

$$\text{Andreu} \rightarrow 3x$$

$$\text{Germana} \rightarrow x$$

$$3x + x = 8$$

c) Un rectangle és 3 metres més llarg que ample i el seu perímetre mesura 26 metres.

$$\text{Ample} \rightarrow x$$

$$\text{Llarg} \rightarrow x + 3$$

Perímetre = suma de tots els costats

$$x + x + (x + 3) + (x + 3) = 26 \rightarrow 2x + 2(x + 3) = 26$$

d) He pagat 2 € per tres llapis i un bolígraf. Però el bolígraf costava el doble que el llapis.

$$\text{llapis} \rightarrow x$$

$$\text{bolígraf} \rightarrow 2x$$

$$x + x + x + 2x = 2 \rightarrow 3x + 2x = 2$$

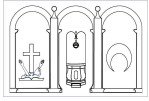
e) Un ciclista ha recorregut la distància des d'A fins a B a la velocitat de 15 Km/h. Si hagués anat a 10 Km/h, hauria tardat una hora més.

$$\text{velocitat} = \frac{\text{espai}}{\text{temps}} \rightarrow \text{temps} = \frac{\text{espai}}{\text{velocitat}}$$

$$\text{espai} \rightarrow x$$

$$\text{temps del lent (10 Km/h)} = \text{temps del ràpid (15 Km/h)} + 1h$$

$$\frac{x}{10} = \frac{x}{15} + 1$$



2. Reol les equacions següents per tempteig o amb el que saps.

$$a) \frac{3x-1}{5} = 4 \rightarrow 3x-1=5 \rightarrow 3 \cdot 2-1=5 \Rightarrow x=2$$

$$b) 3x = 21 \rightarrow 3 \cdot 7 = 21 \Rightarrow x = 7$$

$$c) \sqrt{\frac{3x-1}{5}} = 2 \rightarrow 3x-1=20 \rightarrow 3 \cdot 7-1=20 \rightarrow \sqrt{\frac{20}{5}} = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow x=7$$

$$d) 3x-1=20 \Rightarrow x=7$$

$$e) \frac{7}{x+1} = 1 \rightarrow x+1=7 \Rightarrow x=6$$

$$f) \frac{10}{2x-3} = 2 \rightarrow 2x-3=5 \rightarrow 2 \cdot 4-3=8-3=5 \Rightarrow x=4$$

$$g) \sqrt{3x+1} = 5 \rightarrow 3x+1=25 \rightarrow 3 \cdot 8+1=24+1=25 \rightarrow \sqrt{25} = 5 \Rightarrow x=8$$

$$h) x^2 + 2x + 1 = 4 \rightarrow 1^2 + 2 \cdot 1 + 1 = 1 + 2 + 1 = 4 \Rightarrow x = 1$$

$$(-3)^2 + 2 \cdot (-3) + 1 = 9 - 6 + 1 = 10 - 6 = 4 \Rightarrow x = -3$$

$$i) x^3 - \sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 1$$

2. Equacions. Elements i nomenclatura

Cadascuna de les expressions algebraïques a ambdós costats de la igualtat d'una equació reben el nom de *membres*.

Cadascun del monomis que formen els membres s'anomenen *termes*.

La lletra o grup de lletres que es repeteixen en l'equació s'anomena *incògnita*.

El *grau d'una equació* ve donat per el nombre màxim de solucions que pot tenir.

$$3x - 2 = 5x + 3 \rightarrow \text{equació}$$

$$3x - 2 \rightarrow \text{primer membre}$$

$$5x + 3 \rightarrow \text{segon membre}$$

$$x \rightarrow \text{incògnita}$$

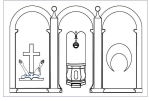
$$\text{equació de grau 1}$$

La *solució* d'una equació és aquell valor (o valors) de la incògnita que fan que es compleixi la igualtat, és a dir, quan substituïm en ambdós membres el valor de la incògnita, la igualtat es compleix, ambdós membres tenen el mateix valor numèric.

$$4x + 4 = 5 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$4 \cdot \frac{1}{4} + 4 = 5$$

Quan substituïm x per el seu valor es compleix la igualtat, per tant, aquesta és la solució.



Dues o més equacions són *equivalents* quan tenen les mateixes incògnites i les mateixes solucions.

$$3x + 1 = 9 - x \Rightarrow x = 2 \rightarrow 3 \cdot 2 + 1 = 9 - 2 \rightarrow 7 = 7$$

$$4x + 1 = 9 \Rightarrow x = 2 \rightarrow 4 \cdot 2 + 1 = 9$$

Les equacions són EQUIVALENTS tenen la mateixa solució $\rightarrow x = 2$

3. Transposició de termes.

La *transposició de termes* és una tècnica bàsica que permet transformar les equacions en altres d'equivalents més senzilles, portant els termes d'un membre a un altre de la igualtat.

El principi que seguirem és que: en sumar, restar, multiplicar o dividir el mateix nombre en els dos membres d'una equació, s'obté una altra equació equivalent.

PRIMER CAS: $x+a=b$

$$x + 3 = 4$$

$$x + 3 - 3 = 4 - 3$$

$$x = 4 - 3$$

$$x = 1$$

el que està sumant a un membre passa restant a l'altre.

SEGON CAS: $x-a=b$

$$x - 2 = 3$$

$$x - 2 + 2 = 3 + 2$$

$$x = 3 + 2$$

$$x = 5$$

el que està restant en un membre passa sumant a l'altre.

TERCER CAS: $a \cdot x = b$

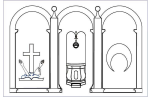
$$2x = 6$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} x = 6 \cdot \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{6}{2}$$

$$x = 3$$

el que està multiplicant en un membre passadividint a l'altre, sense canviar de signe.



QUART CAS:

$$\frac{x}{a} = b$$

$$\frac{x}{3} = 4$$

$$3 \cdot \frac{x}{3} = 3 \cdot 4$$

$$x = 12$$

el que està dividint en un membre passa multiplicant a l'altre, sense canviar de signe.

La transposició de termes permet aïllar la incògnita; és a dir, deixar-la sola en un dels membres de la igualtat, la qual cosa equival a resoldre l'equació.

4. Resolució d'equacions senzilles.

Seguirem les següents passes:

- 1) Reduir els memebres.
- 2) Transposició de termes.

Exemple:

$$2x - 3 + x = 3 + 7x - 8$$

$$2x + x - 7x = 3 + 3 - 8 \rightarrow \text{passem tots els termes amb } x \text{ a un membre i els que no en tenen a l'altre}$$

$$3x - 7x = 6 - 8 \rightarrow \text{sumem monomis semblants a ambdós membres}$$

$$-4x = -2 \rightarrow \text{transposició de termes TERCER CAS}$$

$$x = \frac{-2}{-4} \rightarrow \text{SIMPLIFICAR}$$

$$x = \frac{1}{2} \rightarrow \text{solució}$$

Activitats resoltes

$$3) x - 4 = 1$$

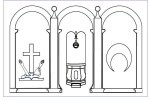
$$x = 4 + 1$$

$$x = 5$$

$$4) x + 3 = 2$$

$$x = 2 - 3$$

$$x = -1$$



$$5) 10 = 7 + x$$

$$-x = 7 - 10$$

$$-x = -3$$

$$x = \frac{-3}{-1}$$

$$x = 3$$

$$6) 8 - x = 5$$

$$-x = 5 - 8$$

$$-x = -3$$

$$x = 3$$

$$7) 3 = 7 - x$$

$$x = 7 - 3$$

$$x = 4$$

$$8) 5x = 15$$

$$x = \frac{15}{5}$$

$$x = 3$$

5. Casos en els que algun membre de l'equació val 0.

Fixen-nos en els següents casos:

$$\text{CAS 1: } 2x = 0 \rightarrow x = \frac{0}{2} \rightarrow x = 0$$

L'única solució possible és $x=0$, perquè només així es pot complir la igualtat.

$$\text{CAS 2: } 0x = 5 \rightarrow \text{no té solució}$$

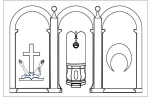
És impossible que es compleixi la igualtat.

$$\text{CAS 3: } 0x = 0 \rightarrow \text{infinites solucions}$$

x pot tenir qualsevol valor, és a dir, per qualsevol valor de x es complirà la igualtat. En aquest cas parlarem d'*identitat*.

Existeixen dos tipus d'igualtats:

- Equacions: només es compleix la igualtat quan la incògnita pren uns determinats valors (solucions).
- Identitats: es compleixen sempre. Els dos membres valen el mateix.



6. Mètode general per a resoldre equacions de primer grau.

$$x - 3 + 2(3x - 10) = \frac{x + 2}{2} - 2(x + 1)$$

1) Elimiam parèntesi aplicant la propietat distributiva.

$$x - 3 + 6x - 20 = \frac{x + 2}{2} - 2x - 2$$

2) Si hi ha denominadors, cercam el denominador comú (mcm dels denominadors) de tota l'equació.

$$\frac{2x - 6 + 12x - 40}{2} = \frac{x + 2 - 4x - 4}{2}$$

3) Una equació és una igualtat. Sempre que faguem exactament el mateix als dos membres es manté la igualtat. Per tant, podem eliminar els denominadors dels dos memebres perquè tenen el mateix valor.

$$2x - 6 + 12x - 40 = x + 2 - 4x - 4$$

4) Passem a un memebre tots els termes que tenen incògnita i a l'altre tots els que no la tenen. Recorda que quan un terme canvia de membre, canvia el signe.

$$2x + 12 - x + 4x = 2 - 4 + 6 + 40$$

5) Sumem o restem cada memebre perquè són monomis semblants.

$$18x - x = 41$$

$$17x = 44$$

6) Aïllam la incògnita (el nombre que multiplica a x passa a l'altre membre dividint-lo, sense canviar de signe).

$$x = \frac{44}{17}$$

Activitats resoltes:



$$1) \frac{x}{2} - 3 \left(1 - \frac{x}{4} \right) = \frac{x}{8} - 2$$

$$\frac{x}{2} - 3 + \frac{3x}{4} = \frac{x}{8} - 2$$

$$\frac{4x - 24 + 6x}{8} = \frac{x - 16}{8}$$

$$4x - 24 + 6x = x - 16$$

$$9x = 40$$

$$x = \frac{40}{9}$$

$$2) \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} + 1 \right) - \frac{2x}{3} = \frac{1}{6} \left(x - \frac{1}{2} \right)$$

$$\frac{x}{4} + \frac{1}{2} - \frac{2x}{3} = \frac{1}{6}x - \frac{1}{12}$$

$$\frac{3x + 6 - 8x}{12} = \frac{2x - 1}{12}$$

$$3x - 8x - 2x = -6 - 1$$

$$-7x = -7$$

$$x = \frac{-7}{-7}$$

$$x = 1$$

7. PROBLEMES D'EQUACIONS

Utilitzarem les equacions per expressar algebraicament la relació que existeix entre els elements coneguts (dades) i els desconeguts (incògnites) d'un problema.

EXEMPLE 1

Quin és el nombre que augmentat en 55 és igual a 6 vegades el seu valor?

Plantejament

Equació

Un nombre $\rightarrow x$

Nombre augmentat en 55 $\rightarrow x + 55$

$$x + 55 = 6x$$

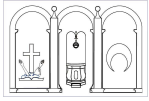
Sis vegades un nombre $\rightarrow 6x$

Resolució

$$x + 55 = 6x \rightarrow x - 6x = -55 \rightarrow -5x = -55 \rightarrow x = 11$$

Interpretació dels resultats

El nombre és 11 $11 + 55 = 66$



EXEMPLE 2

N'Anibal té 15 anys, la seva germana 12 i la seva mare 40. Quants anys han de transcórrer per a què entre ambdós fills igualin l'edat de la mare?

Plantejament

Equació

$$15 + x + 12 + x = 40 + x$$

	Actualitat	Passats x anys
Edat Anibal	15	15+x
Edat germana	12	12+x
Edat mare	40	40+x

Resolució

$$15 + x + 12 + x = 40 + x$$

$$x - x + x = 40 - 12 - 15 \rightarrow x = 13$$

Interpretació dels resultats

Han passat 13 anys

	Actualitat	Passats x anys
Edat Anibal	15	15+13=28
Edat germana	12	12+13=25
Edat mare	40	40+13=53

EXEMPLE 3

La colla ha entrat a berenar a un lloc d'entrepans. Un entrepà costa un euro més que un sandvitx. Per 3 sandvitxos i dos entrepans paguem 11 euros. Quant costa un sandvitx? I un entrepà?

Plantejament

Equació

cost sandvitx $\rightarrow x$

cost d'un entrepà $\rightarrow x + 1$

3 sandvitxos $= x + x + x = 3x$

2 entrepans $= x + 1 + x + 1 = 2(x + 1)$

$$3x + 2(x + 1) = 11$$

Resolució

Interpretació dels resultats

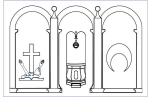
$$3x + 2(x + 1) = 11$$

$$3x + 2x + 2 = 11 \rightarrow 3x + 2x = 11 - 2 \rightarrow 5x = 9$$

$$x = \frac{9}{5} = 1,80 \text{ euro} \rightarrow 1,80 + 1 = 2,80 \text{ euro}$$

sandvitx = 1,80 euro entrepà = 2,80 euro

$$3 \cdot 1,80 + 2 \cdot 2,80 = 5,40 + 5,60 = 11$$



EXEMPLE 4

Un arquitecte té una superfície on $\frac{1}{3}$ servirà per a la construcció d'edificis, $\frac{3}{7}$ per a la construcció d'aparcaments i encara li queden 1600 m^2 sense construir. Quina és la superfície que té?

Plantejament

Superfície total $\rightarrow x$

Superfície edificis $\rightarrow \frac{1}{3}x$

Superfície aparcaments $\rightarrow \frac{3}{7}x$

Superfície sense edificar $\rightarrow 1600 \text{ m}^2$

Equació

Superfície total = *S(edificis)* + *S(aparcaments)* + *S(sense construir)*

$$x = \frac{1}{3}x + \frac{3}{7}x + 1600$$

Resolució

$$x = \frac{1}{3}x + \frac{3}{7}x + 1600 \rightarrow \frac{21x}{21} = \frac{7x + 9x + 1600 \cdot 21}{21} \rightarrow 21x = 16x + 33600$$

$$21x - 16x = 33600 \rightarrow 5x = 33600 \rightarrow x = \frac{33600}{5} \rightarrow x = 6720$$

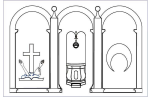
Interpretació dels resultats

La superfície total són 6720 m^2

$$\frac{1}{3} \text{ de } 6720 = 2240$$

$$\frac{3}{7} \text{ de } 6720 = 2280$$

$$1600 + 2280 + 2240 = 6720 \text{ m}^2$$



EXEMPLE 5

Un cotxe surt d'A cap a B a 80 Km/h. A la mateixa hora surt una moto de B cap a A, per una carretera paral·lela a 60 Km/h. Si sabem que la distància entre A i B són 315 Km, volem calcular el temps que tarden en creuar-se i quin espai han recorregut ambdós mòbils.

Plantejament

El temps que tarden en trobar-se és t

Espai recorregut pel cotxe $80t$. Si en 1 h recorre 80 Km, en t hores n'haurà fet $80t$

Espai recorregut per la moto $60t$

Equació

Espai total entre A i B = Espai recorregut cotxe + Espai recorregut moto

$$315 = 80t + 60t$$

Resolució

$$80t + 60t = 315$$

$$140t = 315$$

$$t = \frac{315}{140} = 2,25 \text{ h} = 2 \text{ h } 15 \text{ min}$$

Interpretació dels resultats

$$\text{Espai cotxe} \rightarrow 80 \cdot 2,25 = 180 \text{ Km}$$

$$\text{Espai moto} \rightarrow 60 \cdot 2,25 = 135 \text{ Km}$$

EXEMPLE 6

Calcula les dimensions d'un triangle isòsceles que té per base x cm i per costats iguals el doble de la base. El perímetre del triangle és 25 cm. Què mesuren els seus costats?

Plantejament

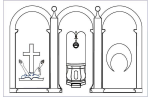
Base x , costats iguals $2x$ i $2x$, $P=25$ cm

Equació

$$2x + 2x + x = 25$$

Resolució

$$2x + 2x + x = 25 \rightarrow 5x = 25 \rightarrow x = \frac{25}{5} \rightarrow x = 5$$



Interpretació dels resultats

La base mesura 5 cm i els costats iguals mesuren 10 cm.

Si sumem $5+10+10=25$ cm que és el perímetre.

EXEMPLE 7

Un botiguer ha barrejat 5 litres d'oli de 10 €/l amb una determinada quantitat d'oli de qualitat superior que costa 15 €/l. Si la mescla obtinguda surt a 12 €/l, quina quantitat d'oli de qualitat superior ha fet servir?

Plantejament

	Quantitat d'oli (l)	Preu de l'oli per l (€/l)	Cost (€)
Oli de qualitat inferior	6	10	$6 \cdot 10 = 60$
Oli de qualitat superior	x	15	15x
Mescla	x+6	12	$12(x+6)$

Equació

$$60 + 15x = 12(x + 6)$$

Resolució

$$60 + 15x = 12(x + 6) \rightarrow 60 + 15x = 12x + 72 \rightarrow 15x - 12x = -60 + 72 \rightarrow 3x = 12 \rightarrow x = \frac{12}{3} \rightarrow x = 4$$

Interpretació dels resultats

	Quantitat d'oli (l)	Preu de l'oli per l (€/l)	Cost (€)
Oli de qualitat inferior	6	10	$6 \cdot 10 = 60$
Oli de qualitat superior	4	15	$15 \cdot 4 = 60$
Mescla	$4+6=10$	12	$12 \cdot 10 = 120$

EXEMPLE 8

Una aixeta tarda en omplir un dipòsit 2 hores. Una altra aixeta de cabal més petit, tarda en omplir-lo 28 hores. Quin temps tardaran ambdues aixetes en omplir el dipòsit?

Plantejament

Aixeta 1	2 hores	En 1 hora $\frac{1}{2}$
Aixeta 2	28 hores	En 1 hora $\frac{1}{28}$
Juntes	x	En una hora $\frac{1}{x}$



Equació

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{28} = \frac{1}{x}$$

Resolució

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{28} = \frac{1}{x} \rightarrow \frac{14x + x}{28x} = \frac{28}{28x} \rightarrow 15x = 28 \rightarrow x = \frac{28}{15} \rightarrow x = 1h 52 \text{ min}$$

Interpretació dels resultats

Tarda en omplir-lo 1 hora i 52 minuts.